BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2010

ЗАДАЧА УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Т.М.МУСТАФАЕВА

Бакинский Государственный Университет

mextat@inbox.az

В работе рассматривается задача управляемости для уравнения колебаний струны с управлением в правой части уравнения с минимальной энергией. Используя явный вид решения краевой задачи для трех различных случаев выбора допустимого управления, в виде ряда построено оптимальное управление.

Пусть состояние управляемого процесса описывается функцией $u(x,t)$, которая внутри области $Q=\{0<x<1, 0<t<T\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_{tt}=u_{xx}+f(x,t,\upsilon(x,t)), \tag{1}$$

начальным и граничным условиям

$$u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x), \quad 0<x<1, \tag{2}$$

$$u_x(0,t)=0, \quad u_x(1,t)+\alpha u(1,t)=0, \quad 0<t<T, \tag{3}$$

где $u_0(x)\in W_2^1(0,1)$, $u_1(x)\in L_2(0,1)$, $f(x,t,\upsilon)$- заданные функции, $\alpha\neq 0$ - заданное число, $\upsilon(x,t)$- управляющая функция.

В работе будут рассмотрены задачи оптимального управления для следующих различных частных случаев:

а) $f(x,t,\upsilon)=\upsilon(x,t)$, где в качестве допустимого управления $\upsilon(x)$ берется функция из $L_2(Q)$;

б) $f(x,t,\upsilon)=\Psi(t)\upsilon(x)$, где $\Psi(t)$- заданная функция из $L_2(0,T)$, а допустимыми управлениями являются произвольные функции $\upsilon(x)$ из $L_2(0,1)$;

в) $f(x,t,\upsilon)=\upsilon(x)\delta(t-t_0)$, где t_0- произвольная точка из интервала $(0,T)$, где в качестве допустимого управления $\upsilon(x)$ берется произвольная функция из $L_2(0,1)$, а $\delta(t)$- функция Дирака.

Под решением задачи (1)-(3) для каждого допустимого управления $\upsilon(x,t)$ понимается функция $u(x,t)$ из $W_2^1(Q)$, которая для любой функции $\psi(x,t)\in W_2^1(Q)$, $\psi(x,T)=0$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint_Q \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \upsilon\psi \right) dxdt + \alpha \int_0^T u(1,t)\psi(1,t)dt - \int_0^1 u_1(x)\psi(x,0)dx = 0 ,$$

а условие $u(x,0) = u_0(x)$ выполняется в обычном смысле.

Ниже будем изучать каждый конкретный случай в отдельности.

Случай а). В этом случае каждое допустимое управление определяет единственное решение задачи (1)-(3), которое с помощью функции источника $G(x,\xi,t)$ можно представить в виде [1], [2]:

$$u(x,t) = \int_0^1 u_0(\xi)G_t(x,\xi,t)d\xi + \int_0^1 u_1(\xi)G(x,\xi,t)d\xi +$$

$$+ \int_0^t \int_0^1 \upsilon(\xi,s)G(x,\xi,t-s)d\xi ds, \tag{4}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n t \, X_n(x) X_n(\xi) , \tag{5}$$

а $X_n(x)$ и λ_n является собственными функциями и собственными значениями следующей спектральной задачи:

$$X'' + \lambda^2 X = 0,$$
$$X'(0) = 0,$$
$$X'(1) + \alpha X(1) = 0.$$

В выбранном классе допустимых управлений требуется указать такое управление $\upsilon(x,t)$, чтобы соответствующее ему решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3), представленное в виде (4), удовлетворяло условиям

$$u(x,T) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,T) = \varphi_1(x) \tag{6}$$

и при этом функционал

$$I(\upsilon) = \|\upsilon\|_{L_2}^2 \tag{7}$$

принимал наименьшее возможное значение, где $\varphi_0 \in W_2^1(0,1)$, $\varphi_1 \in L_2(0,1)$, [3].

Условия (6) можно записать в виде

$$\begin{cases} \int_0^T \int_0^1 G(x,\xi;T-s)\upsilon(\xi,s)d\xi ds = \psi_0(x), \\ \int_0^T \int_0^1 G_t(x,\xi;T-s)\upsilon(\xi,s)d\xi ds = \psi_1(x), \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\psi_0(x) = \varphi_0(x) - \int_0^1 G_t(x,\xi;T)u_0(\xi)d\xi - \int_0^1 G(x,\xi;T)u_1(\xi)d\xi,$$

$$\psi_1(x)=\varphi_1(x)-\int_0^1 G_{tt}(x,\xi;T)u_0(\xi)d\xi-\int_0^1 G_t(x,\xi;T)u_1(\xi)d\xi .$$

Из условий на данные задачи следует, что $\psi_0\in W_2^1(0,1),\ \psi_1\in L_2(0,1)$. Тогда

$$\begin{aligned}\psi_0(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^0X_n(x),\\ \psi_1(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^1X_n(x).\end{aligned}\tag{9}$$

Подставляя разложения (9) в соотношение (8) и учитывая (5), получаем:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_n}\displaystyle\int_0^T\sin\lambda_n(T-s)\upsilon_n(s)ds=\psi_n^0,\\ \displaystyle\int_0^T\cos\lambda_n(T-s)\upsilon_n(s)ds=\psi_n^1, \qquad n=1,2,...,\end{cases}\tag{10}$$

где

$$\upsilon_n(t)=\int_0^1\upsilon(\xi,t)X_n(\xi)d\xi .$$

Таким образом, в этом случае задача об управлении с минимальной энергией может быть сформулирована следующим образом. Требуется найти управление

$$\upsilon(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n(t)X_n(x),\tag{11}$$

удовлетворяющее условию

$$\iint_Q\upsilon^2(x,t)dxdt=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n^2(t)dt<\infty ,$$

такое, чтобы последовательность $\{\upsilon_n(t)\}$ удовлетворяла бесконечной системе уравнений (10) и при этом функционал

$$I=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n^2(t)dt\tag{12}$$

принимал наименьшее возможное значение.

Теорема 1. Пусть управляемый процесс описывается краевой задачей (1)-(3), где $f=\upsilon(x,t)\in L_2(Q)$.

Тогда задача об управлении с минимальной энергией имеет единственное решение и это решение представляется в виде

$$\upsilon=\upsilon^0(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n^0\sin\lambda_n(T-t)+\beta_n^0\cos\lambda_n(T-t)\right)X_n(x),\tag{13}$$

где

$$\alpha_n^0 = \frac{8\lambda_n^3 T\psi_n^0 + 4\lambda_n^2\psi_n^0 \sin 2\lambda_n T + 8\lambda_n\psi_n^1 \sin^2 \lambda_n T}{4\lambda_n^2 T^2 - \sin^2 2\lambda_n T - 4\sin^4 \lambda_n T},$$

$$\beta_n^0 = \frac{8\lambda_n^2 T\psi_n^1 - 4\lambda_n\psi_n^1 \sin 2\lambda_n T + 8\lambda_n^2\psi_n^0 \sin^2 \lambda_n T}{4\lambda_n^2 T^2 - \sin^2 2\lambda_n T - 4\sin^4 \lambda_n T}.$$

$$\psi_n^0 = \int_0^1 \psi_0(x) X_n(x) dx, \quad \psi_n^1 = \int_0^1 \psi_1(x) X_n(x) dx.$$

Доказательство. Так как система (10) представляет собой последовательность независимых уравнений, а функционал (7) можно представить в виде

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} I_n , \tag{14}$$

где

$$I_n = \int_0^T \upsilon_n^2(t) dt,$$

то задача сводится к определению $\upsilon_n(t)$, $n = 1,2,...,$ из уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_n}\displaystyle\int_0^T \sin \lambda_n (T-t)\upsilon_n(t)dt = \psi_n^0, \\ \displaystyle\int_0^T \cos \lambda_n (T-t)\upsilon_n(t)dt = \psi_n^1, \qquad n = 1,2,..., \end{cases} \tag{15}$$

минимизирующих функционал I_n.

После того, как такие $\upsilon_n(t)$ будут определены, нужно найти достаточные условия, при выполнение которых ряд (14) сходится на найденных $\upsilon_n(t)$.

Сначала определим оптимальные $\upsilon_n(t)$. В пространстве $L_2(0,T)$ выделим двумерное подпространство H_n элементов $q_n(t)$, определяемых формулой

$$q_n(t) = \alpha_n \sin\lambda_n (T-t) + \beta_n \cos\lambda_n (T-t),$$

где α_n, β_n - произвольные постоянные. Тогда любой элемент $\upsilon_n(t) \in L_2(0,T)$ можно однозначно представить в виде

$$\upsilon_n(t) = q_n(t) + r_n(t), \tag{16}$$

где $r_n(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^T q_n(t) r_n(t) dt = 0 . \tag{17}$$

Тогда

$$\int_0^T \upsilon_n^2(t)dt = \int_0^T q_n^2(t)dt + \int_0^T r_n^2(t)dt .$$

В силу условия (17), имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_n}\displaystyle\int_0^T\left(\alpha_n \sin^2 \lambda_n (T-s) + \frac{\beta_n}{2}\sin 2\lambda_n (T-s)\right)ds = \psi_n^0, \\ \displaystyle\int_0^T\left(\frac{\alpha_n}{2}\sin 2\lambda_n (T-s) + \beta_n \cos^2 \lambda_n (T-s)\right)ds = \psi_n^1, \end{cases} \tag{18}$$

и, следовательно, слагаемое $r_n(t)$ не влияет на решение уравнения (17). Вместе с тем, оно имеет отличную от нуля норму

$$\int_0^T r_n^2(t)dt.$$

Поэтому решение задачи минимизации функционала I_n при условиях (15) должно принадлежать H_n. Из условий (18) находим значения $\alpha_n = \alpha_n^0,\ \beta_n = \beta_n^0$. Тогда

$$q_n^0 = \alpha_n^0 \sin \lambda_n(T-t) + \beta_n^0 \cos \lambda_n(T-t).$$

Поэтому искомое оптимальное управление представляется в виде:

$$\upsilon = \upsilon^0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n^0 \sin \lambda_n(T-t) + \beta_n^0 \cos \lambda_n(T-t)\right)X_n(x).$$

Теорема доказана.

Случай б). В этом случае решение краевой задачи (1)-(3) представляется в виде:

$$u(x,t) = \int_0^1 u^0(\xi)G_t(x,\xi,t)d\xi + \int_0^1 u^1(\xi)G(x,\xi,t)d\xi +$$
$$+\int_0^t\int_0^1 \Psi(s)\upsilon(\xi)G(x,\xi,t-s)d\xi ds. \tag{19}$$

Ставится задача: требуется найти такое управление $\upsilon(x) \in L_2(0,1)$, чтобы соответствующее ему решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3), представленное в виде (19), удовлетворяло условию

$$u(x,T) = \varphi_0(x) \tag{20}$$

и при этом функционал

$$I(\upsilon) = \|\upsilon\|^2_{L_2(0,1)} \tag{21}$$

принимал наименьшее возможное значение.

Условие (20) можно записать в виде

$$\int_0^T\int_0^1 G(x,\xi;T-s)\Psi(s)\upsilon(\xi)d\xi ds = \psi_0(x). \tag{22}$$

Полагая

$$\upsilon(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n X_n(x), \tag{23}$$

где $\upsilon_n=\int_0^1 \upsilon(x)X_n(x)dx$, из уравнения (22) получим систему уравнений

$$\frac{\upsilon_n}{\lambda_n}\int_0^T \sin\lambda_n(T-s)\Psi(s)ds=\psi_n^0, n=1,2,\dots. \tag{24}$$

Таким образом, задача об управлении с минимальной энергией формулируется следующим образом.

Найти υ_n такие, чтобы они удовлетворяли уравнениям (24) и при этом функционал

$$I=\int_0^1 \upsilon^2(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n^2 \tag{25}$$

принимал наименьшее возможное значение.

Теорема 2. Пусть управляемый процесс описывается краевой задачей (1)-(3), в которой $f(x,t,\upsilon)=\Psi(t)\upsilon(x)$, где $\Psi(t)$ - заданная функция из $L_2(0,T)$, а допустимыми управлениями являются любые функции $\upsilon(x)$, принадлежащие $L_2(0,1)$.

Тогда, если не существует такое n $(n=1,2,\dots)$, что $\psi_n^0\neq 0$ и $\alpha_n=0$ и ряд

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n\psi_n^0)^2}{\alpha_n^2} \tag{26}$$

сходится, где $\alpha_n=\int_0^T \sin\lambda_n(T-s)\Psi(s)ds$, то задача об управлении с минимальной энергией имеет единственное решение и оптимальное управление имеет вид

$$\upsilon(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n\psi_n^0}{\alpha_n}X_n(x). \tag{27}$$

Если же хотя бы при одном n одновременно выполнены соотношения $\psi_n^0\neq 0$, $\alpha_n=0$, то задача об управлении с минимальной энергией не имеет решения.

Доказательство. Оптимальное управление ищем в виде (23) и для определения коэффициентов υ_n имеем последовательность уравнений (24). Из этих уравнений υ_n определяются однозначно, если все величины α_n одновременно не равны нулю. Тогда

$$\upsilon_n=\frac{\lambda_n\psi_n^0}{\alpha_n}.$$

Если $\psi_n^0=0$, а $\alpha_n\neq 0$, то $\upsilon_n=0$. Если $\psi_n^0\neq 0$, а $\alpha_n=0$, то для этого

α_n уравнения (24) не имеют решения и, следовательно, задача об управлении с минимальной энергией не имеет решения.

Поскольку нас интересует решение системы (24), на котором функционал (25) ограничен, то, согласно (27), задача об управлении с минимальной энергией будет иметь решение, если $I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\lambda_n\psi_n^0\right)^2}{\alpha_n^2}<+\infty$ и решение рассматриваемой задачи в этом случае представляется в виде ряда (27). Теорема доказана.

Случай в). Так как для любой непрерывной по s в точке t_0 функции $\alpha(s)$ имеет место равенство $\int_0^1\delta(s-t_0)\alpha(s)dt=\alpha(t_0)$, то в этом случае решение краевой задачи (1)-(3) представляется в виде:

$$u(x,t)=\int_0^1 u_0(\xi)G_t(x,\xi,t)d\xi+\int_0^1 u_1(\xi)G(x,\xi,t)d\xi+$$

$$+\int_0^1 \upsilon(\xi)G(x,\xi,t-t_0)d\xi. \tag{28}$$

Ставится задача: требуется найти такое управление $\upsilon(x)\in L_2(0,1)$, чтобы соответствующее ему решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3), представленное в виде (28), удовлетворяло условию (20) и при этом функционал (21) принимал наименьшее возможное значение.

Условие (20) можно записать в виде:

$$\int_0^1 G(x,\xi;T-t_0)\upsilon(\xi)d\xi=\psi_0(x). \tag{29}$$

Так же, как и в предыдущем случае, представляем $\upsilon(x)$ и $\psi_0(x)$в виде (23) и (9), соответственно. Тогда из уравнения (29) получаем систему

$$\frac{\upsilon_n}{\lambda_n}\sin\lambda_n(T-t_0)=\psi_n^0,\ n=1,2,..., \tag{30}$$

относительно коэффициентов υ_n. Поэтому задача об управлении с минимальной энергией в этом случае формулируется следующим образом.

Найти υ_n такие, чтобы они удовлетворяли системе уравнений (30) и при этом функционал (25) принимал наименьшее возможное значение.

Ясно, что

$$\upsilon_n=\frac{\lambda_n\psi_n^0}{\sin\lambda_n(T-t_o)},$$

а условие разрешимости задачи управления с минимальной энергией имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2\left(\psi_n^0\right)^2}{\sin^2\lambda_n(T-t_o)}<+\infty\,. \tag{31}$$

Аналогично случаю б) можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть управляемый процесс описывается краевой задачей (1)-(3), в которой $f(x,t,\upsilon)=\upsilon(x)\delta(t-t_0)$, допустимые управления $\upsilon(x)$ принадлежат $L_2(0,1)$. Тогда, если не существует такого n $(n=1,2,...)$, что $\psi_n^0 \neq 0$ и $\sin\lambda_n(T-t_o)=0$ и ряд (31) сходится, то задача об управлении с минимальной энергией имеет единственное решение, а оптимальное управление имеет вид

$$\upsilon(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n\psi_n^0}{\sin\lambda_n(T-t_o)}X_n(x)\cdot$$

Если же хотя бы при одном n одновременно выполнены соотношения $\psi_n^0 \neq 0$, $\sin\lambda_n(T-t_o)=0$, то задача об управлении с минимальной энергией не имеет решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972, 724 с.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1977, 464 с.
4. Чабакаури Г.Д. О процессе колебаний струны со свободным правым концом и малым по модулю граничным управлением на левом конце // ДУ, 2003, т. 39, №6, с. 820-828.
5. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Управляемость упругих колебаний систем с распределенными и сосредоточенными параметрами по двум границам // Журнал выч. матем. и матем. физики, 2006, т. 46, №11, с. 2032-2044.
6. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце струны при свободном втором ее конце за произвольный достаточно большой отрезок времени // ДУ, 2007, т. 43, №12, с. 1655-1663.

MİNİMAL ENERJİLİ SİMİN RƏQS TƏNLİYİ ÜÇÜN İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ

T.M.MUSTAFAYEVA

XÜLASƏ

İşdə idarəedici tənliyin sağ tərəfinə daxil olan simin rəqs tənliyi üçün minimal enerjili idarəetmə məsələsinə baxılır. Mümkün idarəedicinin seçiminin üç müxtəlif halında sərhəd məsələsinin həllinin aşkar şəklindən istifadə edərək optimal idarəedici sıra şəklində tapılır.

THE CONTROLLABILITY PROBLEM FOR THE STRING VIBRATION EQUATION WITH MINIMAL ENERGY

T.M.MUSTAFAYEVA

SUMMARY

The article deals with the controllability problem for the string vibrations equation with a control in the right hand side of the equation with minimal energy. Using the obvious form of the solution of the boundary value problem in three different cases the solution of the stated problem, i.e. optimal control is found in the form of a series.